Temat 6: Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

Będziemy wiedzieć:
- jak wygląda postać dziesiętna liczby rzeczywistej;

Będziemy znać:
- metodę przedstawiania ułamków zwykłych w postaci dziesiętnej i na odwrót;
- reguły zaokrąglania;
- różnicę między ułamkami niewymiernymi i wymiernymi, przedstawianymi w postaci dziesiętnej;

Będziemy potrafić:
- sprawdzić, czy dany ułamek zwykły można przedstawić w postaci ułamka dziesiętnego skończonego;
- zamienić ułamek dziesiętny skończony na ułamek zwykły, ze szczególnym uwzględnieniem ułamków okresowych;
- zaokrąglić liczbę z podaną dokładnością;
- obliczyć błąd przybliżenia i określić, czy to jest przybliżenie z nadmiarem czy niedomiarem;
- wyznaczyć w liczbie dowolną cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym okresowym.

Ułamek dziesiętny skończony to ułamek o mianowniku, który jest potęgą liczby 10 o wykładniku naturalnym.

$$\frac{p}{q}, gdzie\ p, q \epsilon Z, q = 10^n\ i\ n \epsilon N$$

Aby przedstawić **ułamek zwykły w postaci ułamka dziesiętnego**, należy podzielić licznik przez mianownik, np.
$\frac{6}{25} = 0{,}24, ponieważ$:

$$\begin{array}{l} \underline{\ 0{,}2\,4\ } \\ \ 6 \quad\ \ : 25 \\ \ 6\,0 \\ \underline{-5\,0} \\ \ \ 1\,0\,0 \\ \underline{-1\,0\,0} \\ \quad\ \ = \end{array}$$

Warto wiedzieć, że postać skończonego ułamka dziesiętnego można otrzymać wtedy i tylko wtedy, gdy jest on liczbą wymierną i w rozkładzie mianownika na czynniki pierwsze występują jedynie liczby 2 lub/i 5.

Zdarza się, że ułamki dziesiętne bywają okresowe (ich rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone, ale okresowe):
$\frac{1}{3} = 0,(3)$ lub $\frac{1}{6} = 0{,}1(6)$ lub $\frac{1}{7} = 0,(142857)$

Biorąc pod uwagę ostatni przykład, można szybko **wyznaczyć dowolną cyfrę po przecinku**.
Wystarczy zauważyć, że okres składa się z 6 pozycji, czyli na setnej pozycji będzie cyfra: 8, ponieważ:
100:6≅16 z niedomiarem, 6*16=96 i pozostają jeszcze 4 pozycje do pełnej setki. Na czwartej pozycji jest włąśnie cyfra 8.

Każdy **ułamek okresowy można przedstawić za pomocą ułamka zwykłego** i jest to liczba wymierna.
x=0,(3) *obie strony równania mnożymy przez potęgę liczby 10 o wykładniku równym ilości cyfr)*
10x=3+x
10x-x = 3
9x=3 /:9
x = $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Drugi przykład:
x=$0,(142857)$ /*10^6
1000000x = 142857 + x
1000000x-x = 142857
999999x = 142857
$x = \frac{142857}{999999}$, zauważamy, że liczba w liczniku i w mianowniku jest podzielna przez 9

$$x = \underset{:9}{\frac{142857}{999999}} = \underset{:3}{\frac{15873}{111111}} = \underset{:37}{\frac{5291}{37037}} = \underset{:13}{\frac{143}{1001}} = \underset{:11}{\frac{11}{77}} = \frac{1}{7}$$

Każdy **ułamek dziesiętny nieskończony**, który nie daje się przedstawić za pomocą okresowo powtarzającego się ciągu cyfr jest liczbą niewymierną, np.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}70710678118654752440084436210484903\ldots$$

π ≈ 3,141592 653589 793238 462643 383279 502884 ...

Szczególnie w takiej sytuacji można zastosować **regułę zaokrąglania**:
- jeśli pierwszą odrzucaną cyfrą jest 1, 2, 3 lub 4 to ostatnią zachowaną pozostawiamy bez zmian;
- jeśli pierwszą odrzucaną cyfrą jest 5, 6, 7, 8 lub 9 to ostatnią zachowaną zwiększamy o 1.

Niedomiar występuje, gdy przybliżenie liczby jest mniejsze, a **nadmiar**, gdy to przybliżenie jest większe.