Temat 47. Pojęcie funkcji.

Będziemy wiedzieć:
- kiedy przyporządkowanie można nazwać funkcją;

Będziemy znać:
- sposoby opisywania funkcji;
- pojęcia: dziedzina, przeciwdziedzina, argument, wartość funkcji;
- definicję miejsca zerowego funkcji;

Będziemy potrafić:
- rozpoznawać, wśród danych przyporządkowań, te które opisują funkcje;
- opisywać funkcję w tabeli, graficznie, za pomocą opisu słownego, par uporządkowanych i wzoru funkcji;
- odczytywać wartość funkcji dla danego argumentu;
- odczytywać argumenty, dla których funkcja przyjmuje określoną wartość;
- podawać miejsca zerowe funkcji.

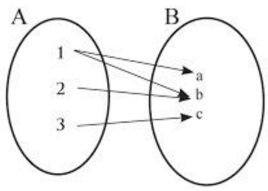
Każdy obywatel Polski ma swój pesel. Jest mu przypisany tylko i **wyłącznie jeden** taki numer. Podobna sytuacja jest w przypadku daty urodzenia. Nikt nie rodzi się dwa razy, więc **wszystkim** jest przypisana **tylko jedna** data urodzin.
Każdy dzień jest niepowtarzalny i ma **tylko jedno** określone miejsce w kalendarzu (nie można sprawić, żeby przeżyć jeszcze raz ten sam dzień w życiu).
Wszystkie te opisowe przypadki można by określić jako funkcje, gdyż jest to określony rodzaj przyporządkowania, gdzie jednemu elementowi z jednego zbioru jest przyporządkowany tylko jeden element z drugiego zbioru.

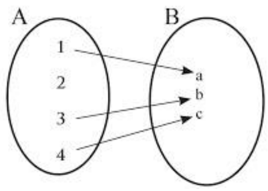
Jeśli przyjmiemy jako zbiór (dziedzinę) argumentów funkcji liczby naturalne, to każdej z nich jest przyporządkowana tylko jedna reszta z dzielenia np. przez 5. Zbiór reszt jest zbiorem wartości funkcji (czyli przeciwdziedziną). Nie ma konieczności przyporządkowania wszystkich elementów z przeciwdziedziny. Przeciwdziedzina jest to więc pojęcie szersze od zbioru wrtości funkcji, czyli tych wartości, które zostały przyporządkowane argumentom.
Różnym liczbom naturalnym może być przyporządkowana ta sama reszta, np. 1, 6 czy 11 jest przyporządkowana reszta z dzielenia 1, ale każdej liczbie naturalnej jest przyporządkowana tylko jedna reszta (liczbie 13 jest przyporządkowana tylko reszta 3, ale nigdy inne). Taki rodzaj przyporządkowania nazywamy funkcją:

Funkcją ze zbioru X w zbiór Y jest przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru X ($x \in X$) odpowiada dokładnie jeden element zbioru Y ($y \in Y$).

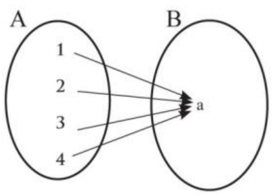
Przyporządkowanie każdej liczbie naturalnej większej od 0, liczb, przez które jest podzielna, nie jest funkcją, bo każda liczba naturalna większa od 0 jest podzielna przynajmniej przez 1 i przez samą siebie.

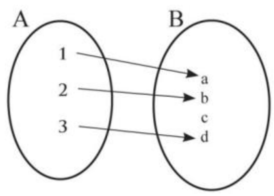
Poniższe rysunki nie przedstawiają funkcji, ponieważ jednemu elementowi ze zbioru A są przyporządkowane dwa elementy ze zbioru B lub nie każdemu elementowi ze zbioru A jest przyporządkowany jakiś element ze zbioru B.





Na poniższych rysunkach są przedstawione w sposób graficzny przykłady przyporządkowań, które są funkcjami, ponieważ każdemu elementowi ze zbioru A jest przyporządkowany dokładnie jeden element ze zbioru B (nie jest istotne, że ten sam, lub że nie każdy).





Oceń, które zdanie opisuje funkcję:
a) Każdej firmie na giełdzie jest przyporządkowana wartość jej akcji w danym dniu;
b) Każdej liczbie naturalnej jest przyporządkowany jej dzielnik;
c) Każdej liczbie naturalnej jest przyporządkowana liczba jej dzielników;
d) Każdemu podatnikowi jest przyporządkowany jego dochód, jaki osiągnął w ubiegłym roku.

Funkcje można opisywać za pomocą:
- opisu słownego: każdej liczbie naturalnej, mniejszej niż 5 jest przyporządkowany jej kwadrat;
- za pomocą tabelki:

x	0	1	2	3	4
f(x)	0	1	4	9	16

- za pomocą grafu;
- za pomocą par uporządkowanych, np. {(0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,16)}
- za pomocą wzoru, np. $y=x^2$ jeśli $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- za pomocą wykresu (wykres funkcji składa się z tylu punktów, ile liczb znajduje się w dziedzinie tej funkcji).

Wykres funkcji powstaje na **układzie współrzędnych** składającym się z dwóch prostopadłych osi liczbowych o wspólnym początku. Oś pozioma jest osią odciętych (OX), a pionowa jest osią rzędnych (OY). Punkty wyznaczone w układzie współrzędnych są współrzędnymi.

Podaj wzór funkcji g opisanej za pomocą zbioru par uporządkowanych:
a) {(4,3), (3,2), (2,1), (1,0)}
b) {(-3,3), (-1,1), (0,0), (1,-1), 2,-2)}

Jeśli wynikiem przyporządkowania jest wartość 0, to argument, któremu jest ona przyporządkowana, nazywany jest **miejscem zerowym funkcji**.

Funkcja f każdej liczbie ze zbioru X={-3, -2, -1, 0, 1, 2} przyporządkowuje jej kwadrat pomniejszony o 4. Dla których argumentów funkcja ta przyjmuje wartości ujemne? Czy ma ona miejsca zerowe (zad.6 str. 138 z podręcznika do matematyki Nowej Ery).

Rozwiązanie zostanie przedstawione za pomocą par uporządkowanych: {(-3,5), (-2,0), (-1,-3), (0,-4), (1,-3), (2,0)}
Zatem funkcja przyjmuje wartości ujemne dla -1, 0, 1, a miejsca zerowe dla -2 i 2.