Temat 3: Liczby całkowite, liczby wymierne

Będziemy wiedzieć:
- które to są liczby całkowite, a które wymierne;
- które ułamki nazywają się egipskimi

Będziemy znać:
- kolejność wykonywania działań matematycznych;
- definicję liczb wymiernych;

Będziemy potrafić:
- umieścić liczby na osi liczbowej;
- doprowadzić ułamek do postaci nieskracalnej;
- wykonywać działania na liczbach wymiernych;
- podać liczbę przeciwną i odwrotną do podanej

Z={...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...}

0∈Z, jeśli c∈Z to c+1∈Z, i c−1∈Z *{definicja liczb całkowitych}*

Własności liczb całkowitych:
- liczba dodatnia jest zawsze większa od liczby ujemnej,
- z dwóch liczb ujemnych większa jest ta liczba, która jest bliżej zera na osi liczbowej,
- zero jest większe od każdej liczby ujemnej.

Wykaż, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, podzielnych przez 3 dzieli się przez 81.
Jeśli oznaczmy trzy kolejne liczby podzielne przez 3 przez 3k , 3k+ 3, 3k+ 6, to ich iloczyn jest równy:
3k(3k + 3)(3k+ 6) = 27k(k + 1)(k + 2).
Zauważmy teraz, że k,k+ 1,k+ 2 to trzy kolejne liczby całkowite, więc jedna z nich jest podzielna przez 3. Zatem powyższa liczba jest podzielna przez 3 ·27 = 81.

Q = $\frac{p}{q}$**, gdzie p,q∈Z ∧ q ≠ 0** *(definicja liczb wymiernych)*

Czy każda liczba całkowita jest wymierna? Tak, bo da się ją zapisać w postaci ułamka zwykłego.
Dlaczego nie można dzielić przez 0? Jak to uzasadnić?

$$\frac{4}{0} = k, \qquad 4 = k * 0, \qquad 4 = 0!$$

Uzasadnieniem może być wykazanie, że doprowadzamy do sprzeczności.

Każde z działań w matematyce ma pewne własności:
- własności dodawania:
  - jest łączne: (a+b)+c = a+(b+c)
  - jest przemienne: a+b = b+a
  - istnieje element neutralny 0: a+0=0+a=a
  - dla każdej liczby a istnieje **liczba przeciwna** –a: **a+(-a) = 0**
- własności mnożenia:
  - jest łączne: (a*b)*c = a*(b*c)
  - jest przemienne: a*b = b*a
  - istnieje element neutralny 1: a*1 = 1*a = a
  - dla każdej liczby a ≠ 0 istnieje **liczba odwrotna** $\frac{1}{a}$: **a***$\frac{1}{a}$ **= 1**
- własność wiążąca dodawanie z mnożeniem:
  - mnożenie jest rozdzielne względem dodawania: a*(b+c) = a*b +a*c

Mnożąc lub dodając, nie trzeba stawiać nawiasów, a składniki lub czynniki można zamieniać miejscami.
Jednak jeśli w działaniu jest mnożenie i dodawanie bez nawiasów, to zawsze należy rozpocząć obliczanie od mnożenia.
Wynika to z kolejności wykonywania działań: () ; a^x i $\sqrt{x}$; * i : ; + i - .

Różnicę dwóch liczb można zastąpić sumą odjemnej i liczby przeciwnej do odjemnika: a-b = a+(-b)
Iloraz dwóch liczb można zastąpić mnożeniem dzielnej przez odwrotność dzielnika: a:b = a*$\frac{1}{b}$, b ≠ 0

Szczególnym przypadkiem ułamków, są **ułamki egipskie** o postaci: $\frac{1}{n}$.
Gdy mamy np. ułamek $\frac{2}{21}$, to można go zapisać jako: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, $gdzie\ a = \frac{n+1}{2}$, $b = \frac{n(n+1)}{2}$, stąd:
$\frac{2}{21} = \frac{1}{\frac{21+1}{2}} + \frac{1}{\frac{21(21+1)}{2}} = \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$

Liczby można przedstawiać na osi liczbowej (odległości między nimi muszą odpowiadać wartości):