Temat 38-39. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników.

Będziemy wiedzieć:
- jaka kiedy zastosować jedną z dwóch poznanych metod rozwiązywania równań;

Będziemy znać:
- metodę przeciwnych współczynników umożliwiającą rozwiązanie układu równań;

Będziemy potrafić:
- rozwiązuje układ równań metodą przeciwnych współczynników;
- zapisać rozwiązanie układu równań w przypadku, gdy jest to układ nieoznaczony (tożsamościowy) lub sprzeczny.

W przypadku rozwiązywania ukłądu równań, wskazane jest, aby najpierw doprowadzić go do najprostszej postaci. Wtedy może się okazać, że lepiej będzie go rozwiązać metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników:

$\begin{cases} 5x - y = 8 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$ w tym przykładzie widać, że niewiadoma y ma różny znak, dlatego dodając równania stronami, pozbędziemy się tej zmiennej

---

$7x = 14$
$x = 2$

Teraz wystarczy podstawić x do dowolnego równania, aby obliczyć y:

$2 \cdot (2) + y = 6$
$y = 2$

Jeśli wygląd równań na początku nie sugeruje możliwości realizacji metody przeciwnych współczynników, można np. pomnożyć obie strony przez odpowiednią liczbę, aby to było wykonalne:

$\begin{cases} p - q = 9 \\ 5p + 2q = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 2p - 2q = 18 \\ 5p + 2q = 3 \end{cases}$

$7p = 21$
$p = 3$

$3 - q = 9$
$q = -6$

Rozwiąż tą samą metodą następujące układy równań:

$\begin{cases} \sqrt{3}a + \sqrt{2}b = 2 / \cdot (\sqrt{3}) \\ a - \sqrt{6}b = 2\sqrt{3} \end{cases}$

$\begin{cases} 3a + \sqrt{6}b = 2\sqrt{3} \\ a - \sqrt{6}b = 2\sqrt{3} \end{cases}$

$4a = 4\sqrt{3}$
$a = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

$\sqrt{3} - \sqrt{6}b = 2\sqrt{3}$
$-\sqrt{6}b = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}$
$b = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\begin{cases} \sqrt{5}x + \sqrt{2}y = \sqrt{10} / \cdot \sqrt{5} \\ \sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 2 / \cdot \sqrt{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 5x + \sqrt{10}y = 5\sqrt{2} \\ 2x - \sqrt{10}y = 2\sqrt{2} \end{cases}$

$7x = 7\sqrt{2}$
$\boldsymbol{x = \sqrt{2}}$

$2 - \sqrt{5}y = 2$
$-\sqrt{5}y = 0$
$\boldsymbol{y = 0}$

Gdy układ jest nieoznaczony (inaczej tożsamościowy), sposób rozwiązania metodą przeciwnych współczynników jest podobny:

$\begin{cases} (1 - x) + 3y = 3 \\ x + 2(1 - y) = y \end{cases}$

$\begin{cases} -x + 3y = 2 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$

$0x + 0y = 0$

Powyższe równanie spełnia dowolna para liczb, dlatego można to zapisać w następujący sposób:

$$\begin{cases} x \in R \\ y = \dfrac{x + 2}{3} \end{cases}$$

W przypadku układów równań, zanim zostanie podjęta decyzja o metodzie rozwiązania, dobrą praktyką jest uporządkowanie i sprowadzenie do jak najprostszej postaci danych równań:

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników (zad.4b i d str. 116 z podręcznika do matematyki Nowej Ery):

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - y = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}x + 2 \\ 5x - (y - (x - 2y)) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1\frac{1}{2}y + 3x = 2 \\ 5x - y + x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1\frac{1}{2}y + 3x = 2 \\ -3y + 6x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1\frac{1}{2}y + 3x = 2 / \cdot (-2) \\ -3y + 6x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - 6x = -4 \\ -3y + 6x = 4 \end{cases}$$

$0x + 0y = 0$ (układ równań jest nieoznaczony)

$$\begin{cases} \boldsymbol{x \in R} \\ \boldsymbol{y = \frac{6x-4}{3} = 2x - \frac{4}{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 - \frac{1}{3}y \\ -x + 5y = 2x - 2y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2\frac{2}{3}y = 4 / \cdot 3 \\ -3x + 7y = 2 / \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 8y = 12 \\ -6x + 14y = 4 \end{cases}$$

$6y = 16$

$y = 2\frac{2}{3}$

$-3x = 2 - 7 \cdot 2\frac{2}{3}$

$3x = \frac{56}{3} - 2$

$3x = \frac{50}{3}$

$x = \frac{50}{9} = 5\frac{5}{9}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 5\frac{5}{9}} \\ \boldsymbol{y = 2\frac{2}{3}} \end{cases}$$