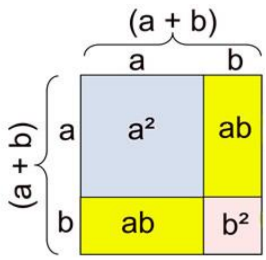
Temat 26-27. Wzory skróconego mnożenia

Będziemy wiedzieć:
- że wzory skróconego mnożenia są sposobem na uproszczenie sposobu obliczania kwadratu sumy lub kwadratu różnicy;

Będziemy znać:
- wzory na kwadrat sumy, kwadrat różnicy i różnicę kwadratów;

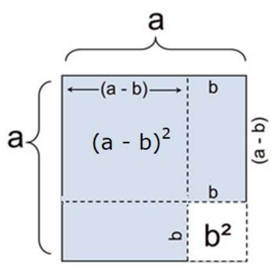
Będziemy potrafić:
- zastosować odpowiedni wzór skróconego mnożenia do danego zadania;
- stosować wzory skróconego mnożenia do wykonywania działań na liczbach postaci $a + b\sqrt{c}$;
- wyprowadzić dany wzór skróconego mnożenia;
- stosować wzory skróconego mnożenia do dowodzenia własności liczb.

Wyrażenie: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2$ to pole kwadratu przedstawionego na poniższym rysunku. Na nim widoczny jest też geometryczny sposób obliczenia tego pola. Kwadrat składa się z prostokątów, których suma pól stanowi pole dużego kwadratu.



Aby w sposób algebraiczny doprowadzić do zapisu wyrażenia $(a + b)^2$ w postaci sumy, należy wykonać działanie:
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Suma: $a^2 + 2ab + b^2$ jest wzorem na obliczenie kwadratu sumy: $(a + b)^2$.
Można więc to twierdzenie zastosować w zadaniu:
Zapisz w postaci sumy algebraicznej (ćwicz. 3d str. 83 z podręcznika do matematyki wydawnictwa Nowa Era)
$(3x + \frac{1}{2}y)^2 = 9x^2 + 3xy + \frac{1}{4}y^2$
Wzór skróconego mnożenia można również wykorzystać przy obliczaniu następującej liczby:
$501^2 = (500 + 1)^2 = 250\,000 + 1000 + 1 = 251\,001$

Wyrażenie: $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2$ jest nieco trudniej przedstawić geometrycznie:
$a^2 = (a - b)^2 + ab + ab - b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

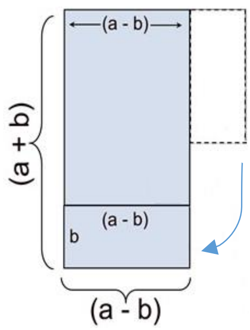


Algebraicznie otrzymuje się w podobny sposób wzór na kwadrat różnicy:
$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

W obu powyższych przypadkach należy jednak uważać na możliwość popełnienia błędu, gdyż $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ i $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ tylko gdy a=0 lub b=0.

Poznany wzór skróconego mnożenia można wykorzystać do obliczenia wyrażenia (zad. 2b str. 84 z podręcznika do matematyki Nowej Ery):
$(\sqrt{3} - 1)^2 - (2 - \sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3} + 1 - 4 + 4\sqrt{3} - 3 = -3 + 2\sqrt{3}$

Wyrażenie $\boldsymbol{a^2} - \boldsymbol{b^2}$ również można przedstawić geometrycznie. Mnożąc różnicę liczb a i b przez sumę liczb a i b, otrzymujemy wzór na różnicę kwadratów.



$(a-b)(a+b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$

Można wykorzystać wzór skróconego mnożenia do obliczenia następującego wyrażenia (zad. 4a str. 85 z podręcznika do matematyki Nowej Ery):
$\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2-1^2}=1$
Poniżej zostanie obliczona liczba 49 podniesiona do kwadratu z wykorzystaniem wzoru skróconego mnożenia:
$49^2=(50-1)^2=2\,500-100+1=2\,401$
Można też rozłożyć dane wyrażenie na czynniki:
$25-10y+y^2=5^2-2\cdot 5y+y^2=(5-y)^2$

Na pozór zadanie, które polega na obliczeniu wyrażenia: $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$ może się wydawać dość trudne, ale wystarczy zauważyć, że można usunąć niewymierność z mianownika, wykorzystując wzór skróconego mnożenia, czyli mnożąc liczik i mianownik przez $\sqrt{2}+1$:

$\frac{3}{\sqrt{2}-1}=\frac{3\cdot(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{3\sqrt{2}+3}{2-1}=3(1+\sqrt{2})$

Jest pewna podchwytliwość w rozwiązywaniu zadań z wzorem skróconego mnożenia dotyczącym różnicy kwadratów:
Zapisz w postaci sumy algebraicznej (ćwicz 6, str. 84 z podręcznika do matematyki Nowej Ery)
$(6+5x)(5x-6)\neq 6^2-(5x)^2$
$(6+5x)(5x-6)=30x-36+25x^2-30x=25x^2-36$

Przy **dowodzeniu własności liczb** możn się wspomagać wzorami skróconego mnożenia (zad. 8c str. 85 z podręcznika do matematyki Nowej Ery):
Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba: $(n+\frac{1}{2})^2-(n-\frac{1}{2})^2$ jest parzysta.

$(n+\frac{1}{2})^2-(n-\frac{1}{2})^2=n^2+n+\frac{1}{4}-n^2+n-\frac{1}{4}=2n$
Każda liczba pomnożona przez 2 jest parzysta.

Zadania utrwalające umiejętność posługiwania się wzorami skróconego mnożenia:
1. Wykorzystaj wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch liczb a i b do obliczenia:
$101\cdot 99=(100+1)(100-1)=100^2-1^2=9999$
$28\cdot 32=(30-2)(30+2)=30^2-2^2=900-4=896$

2. Oblicz:
$(3-\sqrt{5})^2=9-6\sqrt{5}+5=14-6\sqrt{5}$
$(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})=4-5=-1$
$(2a+3)^2=(2a-(-3))^2=4a^2+12a+9$ (można zamiennie stosować wzór na kwadrat sumy lub na kwadrat różnicy, ale wynik będzie ten sam)

3. Zapisz za pomocą sumy algebraicznej wyrażenie:
$(-3x+7y)(3x+7y)=(7y+3x)(7y-3x)=49y^2-9x^2$
$(-x^2+1)(-x^2-1)=(-x^2)^2-1^2=x^4-1$

4. Rozwiąż równanie:
$(x+5)^2-(x-3)^2=x+1$
$x^2+10x+25-x^2+6x-9=x+1$
$15x=-15$
$x=-1$

5. Rozłóż wyrażenie na czynniki:
$y^2-8y+16=(y-4)^2$
$49-y^2=(7+y)(7-y)$

6. Uprość wyrażenie (zad. 1b str. 84 z podręcznika do matematyki Nowej Ery):
$\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=x^2-\frac{9}{4}-x^2+\frac{1}{4}=-\frac{8}{4}$=-2
7. Oblicz wartość wyrażenia (zad. 2a str. 84 z podręcznika do matematyki Nowej Ery):
$(x+1)(x-1)+(x+2)(x-2)-(x+3)(x-3)\ dla\ x=\sqrt{3}$

$(x+1)(x-1)+(x+2)(x-2)-(x+3)(x-3)=x^2-1+x^2-4-x^2+9=x^2+4$
$x^2+4=(\sqrt{3})^2+4=3+4=7$