Temat 22-23. Rozwiązywanie równań i nierówności

Będziemy wiedzieć:
- co to są równania i nierówności oznaczone, tożsamościowe i sprzeczne;
- co to są nierówności równoważne;
- co to są nierówności ostre i nieostre

Będziemy znać:
- różnice między równaniem nierównością i równością;

Będziemy potrafić:
- sprawdzić, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem nierówności;
- rozwiązywać nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;
- zapisywać zbiór rozwiązań w postaci przedziału;
- stosować nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym.

Wyrażenia algebraiczne, to liczby, litery, liczby i litery. Są to proste wyrażenia algebraiczne. Można je łączyć znakami działań arytmetycznych lub nawiasami.
Wyrażenia algebraiczne, które są liczbą lub iloczynem liczby i litery nazywa się jednomianami. Litera w jednomianie jest zmienną, a liczba jest współczynnikiem. Dwumianem nazywają się już dwa jednomiany połączone znakiem dodawania. Jeśli jest więcej jednomianów połączonych znakiem dodawania to takie wyrażenia algebraiczne nazywa się już wielomianami.
Jeśli w jednomianach zmienna jest taka sama, a współczynniki się różnią, to są to jednomiany, które nazywa się wyrazami podobnymi.

Równanie to równość dwóch wyrażeń algebraicznych, gdzie po wstawieniu w miejsce symboli literowych wartości liczbowych (z pewnego przedziału), jest ona spełniona. Gdyby równość była spełniona w przypadku każdych wartości liczbowych, to jest to tożsamość algebraiczna. Jeśli równość nie jest spełniona, to równanie jest sprzeczne.
Stopień równania zależy od najwyższej potęgi przy niewiadomej.

Równania matematyczne pozwalają rozwiązać wiele praktycznych problemów.
Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą opisuje się wzorem ax+b=0, gdzie a liest liczbą rzeczywistą różną od zera, b jest liczbą rzeczywistą, a x jest niewiadomą. Dodatkowo liczbę a nazywa się współczynnikiem przy niewiadomej, a liczbę b nazywa się wyrazem wolnym. Równania takie nazywa się liniowymi.
Równaniem liniowym jest też równanie o postaci ax + b = 0, gdzie a = 0, ale wtedy nie mówi się, że jest to równanie pierwszego stopnia.
Pierwiastkiem takiego równania jest liczba spełniająca to równanie, czyli taka, która po podstawieniu w miejsce niewiadomej pozwoli otrzymać równość.
Aby sprawdzić czy zachodzi równość, warto najpierw zastosować **metodę równań równoważnych**, czyli zadbać o redukcję wyrazów podobnych, obustronnie dodać, czy odjąć takie samo wyrażenie lub pomnożyć, czy podzielić przez takie samo wyrażenie, by otrzymać równanie prostsze, ale mające ten sam zbiór rozwiązań.
Równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą może:
- mieć jedno rozwiązanie (zawsze wtedy, gdy a≠0, rozwiązaniem jest liczba: $-\frac{b}{a}$, a równanie nazywa się **oznaczonym**);
- mieć nieskończenie wiele rozwiązań (zawsze wtedy, gdy a=0 i b=0, rozwiązaniem równania jest każda liczba rzeczywista, a równanie jest nazywane **tożsamościowym**);
- nie mieć żadnych rozwiązań (zawsze wtedy, gdy a=0 i b≠0, nie ma rozwiązania, gdyż otrzymamy równość fałszywą b=0; zbiorem rozwiązań jest wtedy zbiór pusty, a równanie jest **sprzeczne**).

Przykładowe zadania:
W jednej z grup w klasie jest 3 razy więcej chłopców niż w drugiej grupie. Nauczyciel postanowił wyrównać stan chłopców w grupach polecając 5 chłopcom z pierwszej grupy przesiąść się do drugiej grupy. Ile chłopców jest w każdej grupie?
x to liczba chłopców w drugiej grupie;
3x to liczba chłopców w pierwszej grupie;
3x - 5 = x + 5
2x = 10
x = 5
Zauważamy więc, że pierwotnie w pierwszej grupie było 3 · 5 czyli 15 uczniów, a w drugiej grupie było 5 uczniów.
Po poleceniu nauczyciela w pierwszej grupie pozostało 15 - 5 czyli 10 uczniów, a w drugiej grupie 5 + 5, czyli 10 uczniów.

Dziedziną równania jest zbiór R. Sprawdź, czy podane liczby spełniają dane równanie:
a) $\sqrt{\frac{x^4+1}{68}} = 0{,}25x, \quad 2;$
b) $\frac{x^2-2}{x^2+2} = 0, \quad -\sqrt{2}.$

Odpowiedź

$a)\ \sqrt{\frac{17}{68}} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{4}} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = 0{,}5$
b) $\frac{(-\sqrt{2})^2-2}{(-\sqrt{2})^2+2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2-2}{2+2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{0}{4} = 0$

Rozwiąż równanie (zad. 3 f str. 68 podręcznik do matematyki Nowej Ery):

$\frac{x-3}{2} = \frac{x-2}{3}$ sprowadzamy do wspólnego mianownika
$\frac{3x-9}{6} = \frac{2x-4}{6}$ mnożymy obustronnie przez 6
$3x - 2x = 9 - 4$
$x = 5$

Sprawdź czy równanie jest tożsamościowe, czy sprzeczne (zad. 6 c i d str. 68 podręcznik do matematyki Nowej Ery):
$\frac{3}{2}(4x-6) = \frac{2}{3}(9x-6)$
$6x - 9 = 6x - 4$
0=5 równanie jest sprzeczne

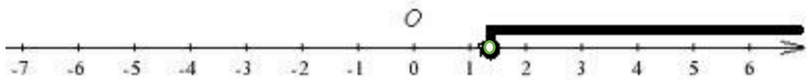
$\frac{1}{2}\left(8 - \frac{1}{2}x\right) = 4 - \frac{1}{4}x$
$4 - \frac{1}{4}x = 4 - \frac{1}{4}x$
0=0 równanie tożsamościowe

Podobnie jak było w przypadku definicji równania, jest także z nierównością, tzn. liczba spełnia nierówność, jeśli po jej podstawieniu w miejsce niewiadomej otrzymujemy nierówność prawdziwą.
Rozwiązanie nierówności polega na wyznaczeniu wszystkich liczb, które je spełniają.

Jeśli w równaniu pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, znak równości zostanie zastąpiony jednym ze znaków: >, <, to powstaną **nierówności ostre**, a jeśli jednym z następujących znaków ≤, ≥, to powstanie **nierówność nieostra** i też będzie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.
Jej ogólną postać można zapisać jako: ax +b > 0, lub ax + b < 0 itd. Współczynnik a i wyraz wolny b są liczbami rzeczywistymi, a chcąc zachować pierwszy stopień tej nierówności, należy jeszcze założyć, że a≠0.
Rozwiązywanie nierówności polega na znalezieniu wszystkich liczb, które spełniają daną nierówność, o ile w ogóle istnieją. Jeśli nie ma liczb spełniających nierówność, to podobnie jak w równaniach, **nierówność jest sprzeczna**, jeśli każda liczba spełnia nierówność, to jest ona nazywana **tożsamościową**.

Mogą się zdarzyć dwie nierówności, które będą miały taki sam zbiór rozwiązań. Są wtedy nazywane **nierównościami równoważnymi**.
Można przedstawić wynik rozwiązania w sposób bardziej czytelny za pomocą graficznej prezentacji na osi liczbowej.
Aby rozwiązać nierówność, należy uporządkować wszystkie wyrazy, a wyrazy podobne zredukować. Po jednej stronie znaku nierówności należy umieścić niewiadome, a po drugiej stronie: liczby.
Jeśli są nawiasy, to również należy się ich pozbyć. Jeśli w nierówności są działania na ułamkach, to najlepiej pomnożyć obie strony nierówności przez wspólny mianownik. W taki sposób można się pozbyć ułamków.
Należy pamiętać o jednej ważnej zasadzie: **jeśli obie strony nierówności są mnożone lub dzielone przez liczbę ujemną, zwrot nierówności musi zostać zmieniony**. Pomnożenie lub podzielenie obu stron nierówności sprawia, że po zmianie zwrotu nierówności otrzymamy nierówność równoważną.

Przykładowe zadania:
Rozwiąż nierówność i przedstaw na osi liczbowej zbiór rozwiązań tej nierówności: 2(x + 4) - 7x < 3x - 2
Rozwiązanie:
2x + 8 - 7x < 3x - 2
-5x + 8 < 3x - 2 /-3x
-8x + 8 < -2 /-8
-8x < -10 /:(-8)
x > 1,25



Rozwiązaniem tej nierówności są wszystkie liczby większe od 1,25.

Sprawdź, czy nierówność: $2 + \frac{4y-6}{3} \geq \frac{3y+2}{4} - \frac{1}{6}$ jest prawdziwa dla liczby 10.
Rozwiązanie:
$2 + \frac{4y-6}{3} \geq \frac{3y+2}{4} - \frac{1}{6} / \cdot 12$
$24 + 16y - 24 \geq 9y + 6 - 2 / -9y$
$7y \geq 4 / : 7$
$y \geq \frac{4}{7}$
Nierówność jest spełniona, czyli jest nierównością prawdziwą dla wszystkich liczb, które są większe lub równe liczbie $\frac{4}{7}$, a zatem również od liczby 10.

Aby wykonać poniższe zadanie, należy na podstawie tekstu ułożyć nierówność z niewiadomą n (**zad. 6a str. 73 z podręcznika do matematyki Nowej Ery**):
Jeśli podwoimy liczbę naturalną n od otrzymanego iloczynu odejmiemy 11, a uzyskaną różnicę pomnożymy przez 3, to otrzymamy liczbę naturalną mniejszą od 21. Podaj możliwe wartości n.
$0 \leq 3 \cdot (2n - 11) < 21 / \div 3 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 2n - 11 < 7$
$0 \leq 2n - 11 \quad \Rightarrow \quad 5{,}5 \leq n$

$2n - 11 < 7 \quad \Rightarrow \quad n < 9$
Odpowiedź:
$5{,}5 \leq nn < 9$, $\boldsymbol{n} \in \{\mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}\}$

(zad. 7a str. 73 z podręcznika do matematyki Nowej Ery):
Wysokość prostopadłościanu jest równa k cm, a jego podstawą jest kwdrat o boku 3 cm. Jakie wartości całkowite może przyjmować k, jeśli suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest większa od 38 cm i mniejsza od 46 cm?

$38 < 8 \cdot 3 + 4k < 46$
$38 < 24 + 4k < 46$
$38 < 24 + 4k \quad \Rightarrow \quad 3{,}5 < k$
$24 + 4k < 46 \quad \Rightarrow \quad k < 5{,}5$
$3{,}5 < k < 5{,}5$
$\boldsymbol{k} \in \{\mathbf{4}, \mathbf{5}\}$