Temat 2-3. Liczby naturalne

Będziemy wiedzieć:
- które to są liczby naturalne;
- co to jest podzielność;
- co to jest wielokrotność;
- co to jest liczba parzysta i nieparzysta;
- co to jest liczba pierwsza i złożona;
- co to jest liczba doskonała;
- co to są liczby względnie pierwsze.

Będziemy znać:
- cechy podzielności liczb naturalnych;
- zasadę tworzenia sita Eratostenesa.

Będziemy potrafić:
- ustalić dzielniki podanej liczby naturalnej;
- rozłożyć liczbę naturalną na czynniki pierwsze;
- znaleźć NWD i NWW;
- przeprowadzić dowody dotyczące podzielności liczb;

Będziemy przekonani o tym, że:
- każdą liczbę naturalną da się rozłożyć na czynniki pierwsze;
- jest nieskończenie wiele liczb pierwszych.

N={0, 1, 2, 3...} **$0 \in N$ jeśli $n \in N$, to $n+1 \in N$** *{definicja liczb naturalnych}*
Czy 0 jest liczbą naturalną? Tak, choć niektórzy zakładają, że nie (to wynik umowy) N^{+}={1, 2, 3...}
Czy jest jakaś granica dla liczb naturalnych? n, n+1, n+2...
Co to znaczy, że liczba naturalna jest podzielna? Wynikiem dzielenia jest inna liczba naturalna.

Niech $n,m \in N \wedge m \neq 0$ m → dzielnik liczby n , gdy istnieje $k \in N$, że n=m*k *(definicja dzielnika liczb naturalnych)*

Co to jest **wielokrotność** liczby naturalnej? n jest wielokrotnością liczby m, pięciokrotność 1 to 5, a trzykrotność 2 to 6, 0 jest zerową wielokrotnością każdej liczby naturalnej.
Ilukrotność? tyle ile wynosi k, czyli np. 10 jest pięciokrotnością liczby 2, bo 10=2*5 uogólniając, każdą **liczbę parzystą** możemy zapisać jako 2k, np. 150, to 2*75 {2k: $k \in$ **N**}={0,2,4,6...}
każdą liczbę nieparzystą możemy zapisać jako 2k+1, po podstawieniu każdej liczby naturanej za k, otrzyzmamy tylko **liczbę nieparzystą** {2k+1: $k \in$ **N**}={1,3,5,7...}.

Własności liczb naturalnych:
- 1 jest dzielnikiem każdej liczby naturalnej,
- 0 nie jest dzielnikiem żadnej liczby,
- wszystkie liczby naturalne są dzielnikiem liczby zero.

Liczba może mieć wiele dzielników (jest z nich **złożona**), ale jeśli ma tylko dwa to jest **liczbą pierwszą**.
Czy 12 może być wielokrotnością liczby 12? tak, 12 jest jednokrotnością liczby 12.
Czy 1 jest liczbą pierwszą? Nie, ani 0 ani 1 nie są ani złożone ani pierwsze.
Ile jest parzystych liczb pierwszych? tylko jedna: 2.

Rozkład liczby naturalnej na czynniki jest przedstawieniem tej liczby w postaci iloczynu liczb naturalnych większych od 1, np. 14 = 2*7, a 32=2*2*2*2*2=16*2=8*4=4*4*2

Przez jakie liczby dzieli się 32? 1, 2, 4, 8, 16, 32

Cechy podzielności:
- przez 0 - żadna;
- przez 1 - każda liczba naturalna;
- przez 2 - liczba, której ostatnia cyfra jest parzysta;

0 jest parzyste, ale w algebrze wyższej liczby całkowite są pierścieniem bez dzielników zera (co oznacza, że żadne 2 elementy różne od zera nie dają zera w iloczynie). Skoro zero nie ma dzielników, to nie może być podzielne przez 2, a zatem nie jest parzyste. Tu jest mowa o podzielności w arytmetyce i zaawansowane pojęcia z abstrakcyjnej algebry nie mają tu zastosowanie. Pojecie "dzielników zera" nie jest tym samym, co pojęcie arytmetycznej podzielności.

- przez 3 – suma cyfr jest podzielna przez 3;
- przez 4 – liczba wyrażona cyfrą dziesiątek i jedności dzieli się przez 4;
- przez 5 – ostatnia cyfra to 0 lub 5;
- przez 6 – gdy dzieli się przez 2 i przez 3;
- przez 7 – gdy różnica wyrażona liczbą składającą się z trzech ostatnich cyfr i liczbą z pozostałych cyfr lub odwrotnie jest podzielna przez 7
- przez 8 – gdy liczba wyrażona trzema ostatnimi cyframi dzieli się przez 8;
- przez 9 – gdy suma cyfr dzieli się przez 9
- przez 10 – gdy cyfra jedności to 0
- przez 11 – gdy różnica sumy cyfr na miejscach nieparzystych i sumy cyfr na miejscach parzystych jest podzielna przez 11

Dla szczególnie dużych liczb ciekawa jest jeszcze inna możliwość sprawdzenia podzielności przez 7:
W danej liczbie należy w rozwinięciu dziesiętnym zastąpić potęgi dziesiątki potęgami trójki.
Przykład:
41 216 = $4*10^4+1*10^3+2*10^2+1*10^1+6*10^0 \Rightarrow 4*3^4+1*3^3+2*3^2+1*3^1+6*3^0$=324+27+18+3+6 = 378
378 = $3*10^2+7*10^1+8*10^0 \Rightarrow 3*3^2+7*3^1+8*3^0$ = 27+21+8 = 56
56:7 = 8 r.0 liczba jest podzielna

Jak przeprowadzić dowód dotyczący podzielności liczb?
Udowodnij, że 11 nie jest dzielnikiem liczby 111 (z ćwiczenia 2 str.11)
111 nie da się zapisać zgodnie z definicją dzielnika liczby naturalnej jako 111=11*k, a jedynie jako 11*10+1

Każda liczba naturalna złożona może być przedstawiona w postaci iloczynu liczb naturalnych większych od 1. Jeśli te liczby są pierwsze, to jest to **rozkład na czynniki pierwsze**.

124 : 2 =62	124 | 2
62 : 2 = 31	62 | 2
124 = 2 * 2 * 31	31 | 31
	1 |

Twierdzenie: *Każda liczba naturalna większa od 1 daje się przedstawić jako skończony iloczyn samych liczb pierwszych na dokładnie jeden sposób czyli te same liczby i taka sama ich ilość. Kolejność może być różna, co wynika z przemienności mnożenia.*

Składa się ono z twierdzeń pomocniczych, tzw. lematów:
Lemat I *Każda liczba naturalna posiada przynajmniej jeden dzielnik będący liczbą pierwszą*
Niech n>1, i wiemy że n|n, to zbiór dzielników liczby n większych od 1 jest niepusty.
Jeśli d będzie najmniejszym z nich, to musi być pierwsze, bo inaczej istniałby jeszcze inny jego dzielnik k<d, który równocześnie byłby dzielnikiem n. Wtedy jednak d nie byłby najmniejszym dzielnikiem.

Lemat II *Każda liczba naturalna większa od 1 daje się przedstawić jako skończony iloczyn samych liczb pierwszych.*
Dla n=2 twierdzenie zachodzi (nie ma rozkłądu na czynniki pierwsze tylko jeden czynnik)
Dla m>2, gdzie 1<n<m jeśli m jest liczbą pierwszą to twierdzenie zachodzi, a jeśli jest złożone to: $m=m_1m_2$
i $1< m_1,m_2 <m$*, a na mocy założenia indukcyjnego każde* m_1,m_2 *jest skończonym iloczynem liczb pierwszych, dlatego również m jest takim iloczynem.*

Lemat III *Jeżeli a jest liczbą całkowitą, a p liczbą pierwszą, to albo a podzielne przez p, albo a i p są względnie pierwsze*
p jako liczba pierwsza posiada tylko dwa dzielniki naturalne 1 i p, dlatego NWD(a,p) może być równe 1 lub p

Dowód:
niech $n\in N$ *i n>1 i na mocy lematu II*
$n=p_1p_2p_3...p_k$, $n=q_1q_2q_3...q_l$
Gdyby żadna z liczb $q_1q_2q_3...q_l$ *nie była równa* p_1*, to ze względu na lemat III, wszystkie byłyby pierwsze względem* p_1*. Liczba n byłaby zatem iloczynem samych liczb pierwszych względem* p_1*, więc sama byłaby pierwsza względem* p_1*, co jest niemożliwe, gdyż* p_1 *dzieli n w związku z pierwszym wpisanym rozwinięciem. Wynika z tego fakt, że wśród liczb q jest liczba* p_1*. Podobnie każda inna liczba p znajduje się wśród liczb q i na odwrót.*
Zbiory liczb p i q są zatem identyczne.

Liczba doskonała to taka, gdy suma jej dzielników jest równa jej samej, np. 6, 28, 496, 8128, 33550336...
Nie wiadomo czy zbiór jest skończony.

NWD (największy wspólny dzielnik): iloczyn czynników pierwszych występujących jednocześnie w obu rozkładach:
NWD (28, 7) = 7
NNW (najmniejsza wspólna wielokrotność): jest to liczba będąca iloczynem wszystkich czynników pierwszej liczby i tych z drugiej liczby, które nie wystąpiły w pierwszej liczbie.
NNW(28, 7) = 28

Przykład z ćwicz. 7 str. 12
x=196, y = 420

196 | 2	420 | 2	NWD (196, 420) = 2*2*7 = 28
98 | 2	210 | 2	NWW (196, 420) = 2*2*5*7*3*7 = 2940
49 | 7	105 | 5	
7 | 7	21 | 7	
1	3 | 3	
	1	

Szczególnym przypadkiem są **liczby względnie pierwsze**, czyli takie, że żaden czynnik z rozkładu pierwszej liczby na czynniki pierwsze nie występuje w rozkładzie drugiej liczby, wtedy NWW(x, y) = x*y i NWD(x, y) = 1.
Np. NWD (21,44) =1
Obie te liczby nie muszą być pierwsze, ale względem siebie sa pierwsze.

21 | 3	44 | 2
7 |	22 | 2
	11 |

Dodatkowo: ***dowód Euklidesa na nieskończenie wiele liczb pierwszych****:*
Udowodnił, że każda liczba naturalna większa od 1 jest iloczynem liczb pierwszych, czyli jeśli mamy skończoną liczbę liczb pierwszych, to zawsze będzie jakaś następna.

Twierdzenie: *Niech A = {p_1, p_2,..., p_n} będzie dowolnym niepustym, skończonym zbiorem liczb pierwszych. Wtedy istnieje liczba pierwsza q nie należąca do tego zbioru.*
Dowód:
Niech $m = p_1 \cdot p2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.
Każda z liczb p_1, p_2,..., p_n jest większa lub równa 2, wiec $m > 2$.
Wtedy m rozkłada się na czynniki pierwsze, gdzie występuje co najmniej jedna liczba pierwsza q. Liczba q jest pierwsza i q dzieli m.
Liczba q nie może być elementem zbioru A, bo dla każdego numeru i liczba m daje resztę 1 z dzielenia przez p_i.

Załóżmy na chwilę, że zbiór liczb pierwszych jest skończony i zawiera dokładnie q elementów, które oznaczymy symbolami $p_1,p_2,\ldots,p_q$.
Rozważmy teraz liczbę
$P=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_q+1$.

Istnieją tylko dwie możliwości: liczba P jest albo liczbą pierwszą, albo liczbą złożoną. Jeśli P jest liczbą złożoną, to dzieli się przez którąś z liczb pierwszych. Zauważmy jednak, że w wyniku dzielenia P przez p_1 otrzymujemy resztę 1, a więc P nie dzieli się przez p_1. Stosując analogiczne rozumowanie dla pozostałych liczb na liście możemy łatwo pokazać, że P nie dzieli się przez żadną z wartości $p_1,p_2,\ldots,p_q$ — a przecież założyliśmy, że to wszystkie liczby pierwsze. Oznacza to nic innego niż to, że P jest liczbą pierwszą różną od każdej z liczb $p_1,p_2,\ldots,p_q$, co stoi w sprzeczności z założeniem, że lista $p_1,p_2,\ldots,p_q$ jest pełna. Zbiór liczb pierwszych ma więc więcej niż q elementów, a to oznacza, że jest nieskończony.

Sito Eratostenesa dla pierwszych stu liczb naturalnych.
- wypisujemy liczby zaczynając od 2 do 100, pomijając liczbę 1;
- wykreślamy wielokrotności kolejno następujących liczb pierwszych 2, 3, 5, 7.

Liczby, które pozostaną, to liczby pierwsze.