Temat 14: Procenty

Będziemy wiedzieć:
- jaka jest różnica między procentem, a promilem;
- jaka jest różnica między procentem, a punktem procentowym;

Będziemy znać:
- sposób na wyznaczenie liczby, gdy dany jest jej procent;

Będziemy potrafić:
- obliczać procent z danej liczby;
- obliczać, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba;
- zmniejszać i zwiększać liczbę o dany procent;
- stosować obliczenia procentowe w zadaniach praktycznych;
- zastosować proporcję w obliczaniu wartości procentowych.

Kiedy jest mowa o wielkościach procentowych, to dotyczy ona najczęściej określenia jakiejś części z całości.
1% to 0,01 tej całości.
By obliczyć, jaka to część całości (x), mając podaną wielkość w procentach (p), należy zastosować wzór: $\frac{p}{100} \cdot x$.
Wycinki w diagramie kołowym często są opisane wartościami procentowymi. Dzięki temu łatwiej dokonać interpretacji tak zaprezentowanych danych.
W sklepach za pomocą wielkości procentowych opisane są obniżki. Wykorzystując wyżej podany wzór, można policzyć kwotę, o jaką zmniejszona została cena towaru.
Chcąc policzyć cenę towaru po zastosowaniu obniżki, można wykorzystać wzór:

$$x - \frac{p}{100} \cdot x.$$

Analogicznie, gdyby sprzedawca postanowił podwyższyć cenę o daną wielkość procentową, to należy zastosować wzór:

$$x + \frac{p}{100} \cdot x.$$

W obu powyższych przypadkach, na podstawie informacji o procentowej zmianie liczby, można wyznaczyć tę liczbę.
Można też obliczyć, o ile procent zmienia się dana wielkość, mając dane przed (x) i po zmianie (y). W tym celu najlepiej wykonać działanie:

$$\frac{y}{x} \cdot 100\%.$$

Wynik, który otrzymujemy jest informacją o tym, jaki procent liczby x stanowi liczba y.
Wielkości wyrażone w procentach są też często przedstawiane w ulotkach reklamowych produktów bankowych.

W języku bankowym używa się określenia **punkt procentowy**, który jest równy 1 i stanowi zmianę wielkości wyrażonej w procentach.
Rada Polityki Pieniężnej ustala wielkość stóp procentowych i czasem podaje do wiadomości informację, że wielkość stopy procentowej ulega zmianie o 0,5 lub 1 punkt procentowy. Podobnie, jeśli firma w jednym roku osiąga dochody wielkości 10 mln zł, a w następnym już 12 mln zł, to jej dochód w ciągu roku wzrasta o 20 punktów procentowych.
Określenie "punkty procentowe" jest często wykorzystywane przez ekonomistów i dotyczy np. zmiany oprocentowania depozytów, czy kredytów bankowych, albo wzrostu cen na giełdzie, czy spadku wartości mieszkań itp. W powyższych przypadkach są brane pod uwagę dwie wartości określonej wielkości, wyrażone w procentach: przed i po zmianie. Różnica tych dwóch wartości przedstawiana jest w punktach procentowych, np. w ciągu roku oprocentowanie lokat bankowych spadło przeciętnie o 2 punkty procentowe. To oznacza, że jeżeli na początku roku wynosiło 7% to pod koniec roku wynosiło już tylko 5%.

Wykorzystując wiedzę o punktach procentowych, można wykonać **zadania:**
1. O ile punktów procentowych zmniejszyła się liczba studentów, jeśli na jednym z kierunków studiów przyjęto 80 osób, a na drugim roku pozostało już tylko 56 osób?
By odpowiedzieć na pytanie, należy przyjąć, że 80 osób to 100% i obliczyć, ile procent ze 100 stanowi 56 osób.

$$\frac{56}{80} \cdot 100 = 70$$

Jeśli 56 osób stanowi 70% z liczby przyjętych, to liczba studentów zmniejszyła się o 30 punktów procentowych, bo:
$100\% - 70\% = 30\%$.

2. W maju jedna tona węgla kosztowała 600 zł. W ciągu miesiąca jej cena wzrosła o 10 punktów procentowych, a w kolejnym miesiącu zmalała o 10 punktów procentowych. Czy cena węgla w lipcu była większa czy mniejsza od 600 zł? Jeśli tak, to o ile punktów procentowych?
Obliczenie:
$(1 + 0{,}1) \cdot 600 = 660$
$(1 - 0{,}1) \cdot 660 = 594$
$600 \cdot x = 594$
$x = 0{,}99$
$100\% - 99\% = 1\%$
Cena węgla w lipcu była mniejsza o jeden punkt procentowy.

3. Na początku roku $46\frac{2}{3}\%$ trzydziestoosobowej klasy stanowiły dziewczęta. W ciągu roku liczba chłopców zmniejszyła się o 6,25 punktu procentowego. Ile procent klasy stanowią teraz dziewczęta?
Obliczenie:
Najpierw należy obliczyć ilu chłopców było w tej klasie.

$100-46\frac{2}{3}=53\frac{1}{3}$

$\frac{(53\frac{1}{3}\cdot 30)}{100}=16$

Liczba 16 to 100% chłopców na początku roku. Zatem:

$100-6\frac{1}{4}=93\frac{3}{4}$

$\frac{(93\frac{3}{3}\cdot 16)}{100}=15$

Wynika z tego, że jeśli pod koniec roku liczba chłopców i równocześnie całej klasy zmniejszyła się o jedną osobę. Liczba dziewcząt pozostała bez zmian i wynosiła 14. Trzeba więc jeszcze policzyć, ile procent z 29 osób stanowi 14 dziewcząt.

$\frac{14}{29}\cdot 100=48\frac{8}{29}$

Dziewczęta stanowią $48\frac{8}{29}$% wszystkich osób w klasie.

4. (Dla zaawansowanych) Cenę towaru podwyższono o 25 punktów procentowych. O ile punktów procentowych należałoby obniżyć nową cenę, aby otrzymać ponownie cenę początkową?

Jeśli przyjmiemy, że a to jest cena towaru, to wzrost ceny o 25 punktów procentowych można zapisać jako:

$$a \cdot (1+0{,}25) = 1{,}25a$$

Teraz trzeba policzyć ile procent 1,25a stanowi a:

$1{,}25a\,.(1-x)=a \Rightarrow 1-x=0{,}8$

$100\% - 80\% = 20\%$

Odpowiedź: a stanowi 80% z 1,25a, a zatem należy obniżyć cenę o 20 punktów procentowych.

W obliczeniach procentowych często znajduje zastosowanie **proporcja**, jest to równość dwóch stosunków postaci: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.
Można ją także zapisać jako: $a:b=c:d$. Można wtedy zauważyć, że wyrazy a i d są skrajne, a wyrazy b i c są środkowe.
Przekształcając zapis do postaci iloczynu $a\cdot d=b\cdot c$ można odkryć podstawową własność proporcji, że iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów skrajnych.
Gdy więc są znane trzy wyrazy proporcji, czwarty wyraz można obliczyć stosując tzw. "regułę trzech", np. $a=\frac{b\cdot c}{d}$ lub $b=\frac{a\cdot d}{c}$, lub $c=\frac{a\cdot d}{b}$, lub $d=\frac{b\cdot c}{a}$.

Promil to jedna tysięczna część pewnej całości i równocześnie jedna dziesiąta procenta. W promilach określa się zawartość alkoholu we krwi, albo poziom zasolenia mórz i oceanów. Bałtyk ma średnie zasolenie jedynie 8‰. To mniej niż 1%. Dlatego przy takich wielkościach łatwiej jest stosować mniejszą jednostkę.
1‰ to nie sam ułamek 0,001, ale jedna tysięczna część całości, czyli 0,001*x.
Jeśli średnie zasolenie mórz na Ziemi wynosi ok. 35‰, to oznacza, że na 1 kg wody przypada 3,5 grama soli. W Morzu Martwym zasolenie sięga 33%. To tyle co 330‰, a więc na 1000 gramów wody przypada 330 gramów stałych substancji, takich jak NaCl, $MgCl_2$, $MgSO_4$, $CaSO_4$ itd. Obrazowo można by sobie to wyobrazić, gdyby 1/3 szklanki stanowiła sól kuchenna, a resztę wypełniała woda.
Również na napojach alkoholowych podawana jest procentowa zawartość alkoholu. Jest to objętościowe stężenie alkoholu w 100 ml napoju.
Na przykład półlitrowa puszka piwa o zawartości alkoholu 5 % zawiera 25 ml alkoholu. bo pół litra to 500 ml, czyli 5 x 100 ml. Z tego wynika, że w całym piwie jest 5 * 5 ml = 25 ml alkoholu.
Tę zawartość można też policzyć jako: 500 * 0,05 = 25.
Statystyki policyjne zawierają też ilości alkoholu w gramach. Wtedy jest konieczna znajomość gęstości alkoholu etylowego. Wynosi ona 0,79 g/ml.
Na tej podstawie można policzyć, że 25 ml alkoholu to 19,8 g alkoholu, bo: 25 * 0,79 = 19,8.

Zawartość **alkoholu we krwi w promilach** można obliczyć na podstawie wzoru:

$x=\frac{A}{(K\cdot M)}$

gdzie, A to ilość alkoholu w gramach;
K to współczynnik wynoszący dla mężczyzn ok. 0,7, a dla kobiet ok. 0,6;
M - masa ciała w kilogramach.
Gdyby zatem dorosły mężczyzna ważący ok. 85 kg wypił jedno piwo 0,5 l, to zawartość alkoholu w jego krwi wynosiłaby:

$x=\frac{19{,}8}{(0{,}7\cdot 85)}=\frac{19{,}8}{59{,}5}=0{,}33$

Tyle wystarczy, by u człowieka uwaga była już nieco rozproszona.
Dopuszczalna zawartość alkoholu we krwi w Polsce, pozwalająca prowadzić pojazdy mechaniczne wynosi **0,2‰**. Dlatego wypicie 0,5 l piwa przez dorosłego człowieka wiąże się z zakazem prowadzenia pojazdu aż do czasu rozkładu alkoholu we krwi.